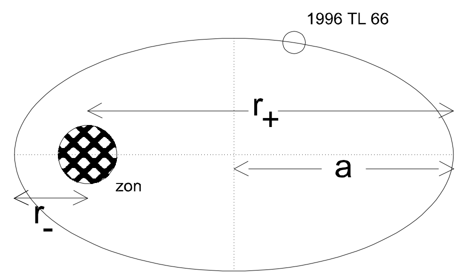
MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = (Σ punten)/3 + 1

afstand aarde - zon	$= 1{,}496 \,.\, 10^{11}$ m
gravitatiekonstante G	$= 6{,}673 \,.\, 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}
dichtheid van ijs (0°C)	$= 917$ kg m^{-3}

Opgave 1.

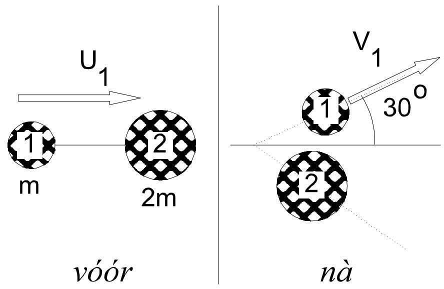
De bolvormige ijsdwerg '1996 TL 66' heeft een diameter van 500 km en draait in een langgerekte baan om de zon. De omloopstijd is 750 jaar, terwijl de maximale afstand r_+ tot de zon $2{,}30 \,.\, 10^{13}$ m bedraagt.



1 a. Bereken de massa van de ijsdwerg.
2 b. Bereken de massa van de zon met behulp van de 3e wet van Kepler.
2 c. Bereken de lengte 2a van de lange as van de ellipsvormige baan van de ijsdwerg.
1 d. Bereken de kortste afstand r_- van de ijsdwerg tot de zon [Mocht je onderdeel c. niet hebben kunnen beantwoorden, doe dan een zinvolle aanname over de lengte van de lange as].
1 e. Bereken de excentriciteit ε van de baan.
2 f. Bereken het baanimpulsmoment L van de ijsdwerg. [NB de oppervlakte van een ellips met excentriciteit ε en lange as 2a is $\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$]
1 g. Bereken de snelheid in het punt waarin de ijsdwerg zich het dichtst bij de zon bevindt.

Opgave 2.

Kogel 1 met massa m botst met een snelheid u_1 op de stilstaande kogel 2 met massa 2m (beide snelheden zijn gemeten in het laboratorium-stelsel). Na de botsing maakt de snelheid van kogel 1 een hoek van 30° met de oorspronkelijke bewegingsrichting.



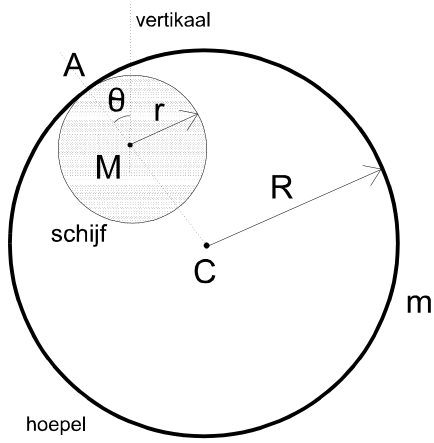
2 a. Bereken de grootte van de snelheid van het zwaartepunt V_{CM} en bereken de snelheden u_1' en u_2' van beide kogels vóór de botsing in het zwaartepunt-stelsel, uitgedrukt in u_1.

De restitutie-coëfficiënt e = 0,5 (dit is de verhouding van de snelheden voor en na de botsing in het zwaartepunt-stelsel).

3 b. Bereken het energieverlies ten gevolge van de botsing, uitgedrukt in m en u_1.
2 c. Bereken de grootte van de snelheid v_1 van kogel 1 nà de botsing in het laboratorium-stelsel.

lees verder

Opgave 3.



Een homogene hoepel met massa m en straal R hangt vertikaal om een schijf met een straal r (R > r). De hoepel wordt uit z'n evenwicht gebracht en daarna losgelaten, zodat de hoepel begint te slingeren. De wrijvingskracht tussen de hoepel en de schijf zorgt er voor dat de hoepel over de schijf rolt zonder te glijden. θ is de hoek die lijn AC met de vertikaal maakt.

1 a. Bereken de potentiële energie van de hoepel als functie van de hoek θ. [HINT: bedenk wat de weg is die het midden van de hoepel aflegt.]

2 b. Bereken de kinetische energie van de hoepel als functie van de hoek θ

3 c. Leidt de bewegingsvergelijking voor de hoepel af.

3 d. Laat zien dat voor kleine hoeken geldt:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$$

en bereken de periode T van de slingering uitgedrukt in r en R.

1 e. Bereken voor welke verhouding $\frac{R}{r}$ de periode minimaal is.

1a. $m = \frac{1}{6}\pi\rho D^3 = 6{,}0.10^{19}$ kg

b. Kepler: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ zodat $M_{zon} = \frac{a^3_{aarde}}{T^2_{aarde}}\frac{4\pi^2}{G} = 1{,}99.10^{30}$ kg

c. $\frac{a^3}{T^2}$ = konstant; dus de lengte lange as is $2a = 2a_{aarde}(\frac{T}{T_{aarde}})^{3/2} = 2{,}47.10^{13}$ m

d. $r_- = 2a - r_+ = 0{,}17.10^{13}$ m

e. $\varepsilon = \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-} = \frac{(2{,}30 - 0{,}17)}{2{,}47} = 0{,}86$

f. $L = m\omega r^2 = 2m\frac{dA}{dt} = 2m\frac{\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} = 1{,}3.10^{36}$ kg m ^{2} / s

g. $v = \omega r_- = \frac{L}{mr_-} = 12$ km/s

2a. $V_{CM} = \frac{m.u_1 + 2m.0}{m + 2m} = \frac{1}{3}u_1$ $\quad u_1' = u_1 - V_{CM} = \frac{2}{3}u_1$ en $u_2' = u_2 - V_{CM} = -\frac{1}{3}u_1$

b. De zwaartepuntsenergie blijft behouden. De kinetische energie in het zwaartepuntsstelsel voor de botsing is:

$$T' = \tfrac{1}{2}.m.(\tfrac{2}{3}u_1)^2 + \tfrac{1}{2}.2m.(\tfrac{1}{3}u_1)^2 = \tfrac{1}{3}mu_1^2$$

De snelheden in het zwaartepuntsstelsel na de botsing zijn de helft van die voor de botsing. Dan wordt de kinetische energie na de botsing 1/4 van de kinetische energie voor de botsing. Het verlies is derhalve:

$$\Delta T' = \tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{3}mu_1^2 = \tfrac{1}{4}mu_1^2$$

c. Uit $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V}_{CM}$ volgt: $v_1\sin(30) = \frac{1}{3}u_1\sin(60)$ zodat $v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}u_1$

3a. Het midden van de hoepel beschrijft een cirkel met straal R-r om het midden van de schijf. Daardoor is de potentiële energie: $U = -mg(R-r)\cos\theta$

b. De kinetische energie is: $T = \frac{1}{2}I_M\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}[mR^2 + m(R-r)^2]\dot{\theta}^2$

c. Uit de Lagrange-vergelijking volgt:

$$0 = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m[(R-r)^2 + R^2]\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta$$

d. Voor kleine hoeken volgt: $\ddot{\theta} + \frac{(R-r)}{[(R-r)^2 + R^2]}g.\theta = 0$

Hieraan voldoet $\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t)$ met $\omega^2 = \frac{(R-r)}{[(R-r)^2 + R^2]}g$

zodat $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{[(R-r)^2 + R^2]}{(R-r)g}}$

e. T bereikt een minimum als het argument onder de wortel minimaal is.

Differentiëren levert: $R^2 - 2rR + \dfrac{r^2}{2} = 0$ zodat $\dfrac{R}{r} = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \approx 1{,}7$